

ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ УПРАВЛЯЕМЫЕ ПРОЦЕССЫ <sup>1</sup>© А. Г. Иванов, Е. Л. Тонков <sup>2</sup>

В ночь с 9 на 10 декабря 2006 года в возрасте 48 лет от сердечного приступа скоропостижно скончался мой ученик, один из создателей теории управления почти периодическими процессами, старший научный сотрудник Института Математики и Информатики Удмуртского государственного университета Александр Геннадиевич Иванов. Защита докторской диссертации Александра Геннадиевича «О некоторых задачах оптимального управления почти периодическими движениями» планировалась в феврале 2007 года в Институте Математики и Механики УрО РАН (Екатеринбург). К сожалению, этой защите не суждено было состояться. В этой краткой статье я постараюсь изложить некоторые результаты диссертации Александра Геннадиевича, представляющие с моей точки зрения наибольший интерес.

**1. Пространство мерозначных почти периодических (п. п.) функций.** В задачах управления п. п. процессами возникает необходимость построения теории мерозначных п. п. функций. Основы такой теории, достаточной для рассмотрения задач оптимизации, построены в диссертации Иванова.

Для заданного множества  $U \subset \mathbb{R}^m$  обозначим  $\text{frm}(U)$  — пространство мер Радона с носителем в  $U$ . Если  $U$  компактно, то  $\text{grm}(U)$  — подмножество в  $\text{frm}(U)$ , состоящее из вероятностных мер Радона. Пусть  $\mu \in \text{frm}(U)$ , для всякой непрерывной функции  $a : U \rightarrow \mathbb{R}$  обозначим  $\langle \mu, a \rangle = \int_U a(u) \mu(du)$ . На пространстве  $\text{frm}(U)$  определим вариацию

$|\mu|(U) \doteq \sup_{\|a\|_0 \leq 1} |\langle \mu, a \rangle|$  и (слабую) норму  $|\mu|_w = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{-k}}{1 + \|a_k\|_0} |\langle \mu, a_k \rangle|$ , где функции  $a_k$  образуют счетное всюду плотное множество в пространстве  $C(U, \mathbb{R})$  с нормой  $\|\cdot\|_0$ .

Для дальнейшего важно, что пространство  $\text{grm}(U)$  метризуемо, и если метрика  $\rho_w$  в  $\text{grm}(U)$  порождена слабой нормой на  $\text{frm}(\mathbb{R}^m)$ , то  $\text{grm}(U)$  компактно. Стандартным образом вводится понятие п. п. по Степанову функции  $t \rightarrow \mu_t$  со значениями в  $\text{frm}(U)$ : функция  $t \rightarrow \mu_t$  называется *почти периодической в смысле Степанова*, если для любой  $a \in C(U, \mathbb{R})$  функция  $t \rightarrow \langle \mu_t, a \rangle$  п. п. по Степанову. Аналогичным образом определяется почти периодичность функции  $t \rightarrow \mu_t$  по Бору. Для п. п. мерозначной функции естественным образом строятся ряд Фурье и показатели Фурье. Ивановым показано, что *множество  $\Lambda(\mu)$  показателей Фурье п. п. функции  $t \rightarrow \mu_t$  не более чем счётно*. Это позволяет говорить о тригонометрическом ряде  $\sum_{\lambda \in \Lambda(\mu)} \nu_\lambda \exp(i\lambda t)$  и *модулю  $\text{Mod}(\mu)$* , отвечающим п. п. функции  $t \rightarrow \mu_t$ .

В  $\Lambda(\mu)$  фиксируем рациональный базис  $\beta_1, \beta_2, \dots$  и при каждом  $m$  построим мерозначный тригонометрический полином

$$\sigma_t^m = \sum_{\substack{|k_p| \leq (m!)^2 \\ p=1 \dots m}} \prod_{j=1}^m \left(1 - \frac{|k_j|}{(m!)^2}\right) \nu_{\frac{k_1}{m!} \beta_1 + \dots + \frac{k_m}{m!} \beta_m} \exp\left(i\left(\frac{k_1}{m!} \beta_1 + \dots + \frac{k_m}{m!} \beta_m\right)t\right).$$

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 06-01-00258).

<sup>2</sup>Текст этих тезисов написан Е.Л. Тонковым.

**Теорема 1.** Для каждой  $a \in C(U, \mathbb{R})$   $\lim_{m \rightarrow \infty} \int_t^{t+1} \langle \sigma_s^m, a \rangle ds = \int_t^{t+1} \langle \mu_s, a \rangle ds$  равномерно относительно  $t$  на числовой прямой  $\mathbb{R}$ .

Если функция  $t \rightarrow g(t, u)$  п. п. по Бору равномерно относительно  $u \in U$  и  $u(t)$  — боровская п. п. функция, то, как хорошо известно, суперпозиция  $g(t, u(t))$  тоже п. п. по Бору. Следующее утверждение дополняет этот результат.

**Теорема 2.** Пусть  $(\mathfrak{X}, \rho)$  — компактное метрическое пространство, функция  $t \rightarrow \mu_{t,x}$  со значениями в  $\text{frm}(U)$  п. п. по Степанову равномерно относительно  $x \in \mathfrak{X}$ . Тогда для всякой функции  $t \rightarrow g(t, u)$ , п. п. по Степанову равномерно относительно  $u \in U$ , функция  $t \rightarrow s(t, x) \doteq \int_U g(t, u) \mu_{t,x}(du)$  п. п. по Степанову равномерно относительно  $x \in \mathfrak{X}$ . Далее, если в дополнение к сказанному,  $\mu_{t,x}$  — вероятностная мера, то модуль функции  $t \rightarrow s(t, x)$  не зависит от  $x$  и содержится в  $\text{Mod}(\Lambda(\mu) \cup \Lambda(g))$ .

**2. Аппроксимационная теорема.** В этой, важной теореме утверждается, что всякое мерозначное п. п. управление с любой степенью точности можно аппроксимировать обычными п. п. управлениями. Пусть  $\delta_u$  — мера Дирака, сосредоточенная в точке  $u \in U$ :  $\langle \delta_u, a \rangle = a(u)$ . Пусть далее,  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$  — счетное, всюду плотное множество в пространстве  $\mathfrak{K}$  каратеодоровских функций  $\varphi(t, u)$  из  $\mathbb{R} \times U$  в  $\mathbb{R}$ , имеющих конечную норму  $\|\varphi\|_1 = \int_{\mathbb{R}} \max_{u \in U} |\varphi(t, u)| dt$ . Норму в пространстве  $S(\mathbb{R}, \text{frm}(U))$  п. п. функций Степанова определим равенством  $\|\mu\|_w = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{-k}}{1 + \|\varphi_k\|_1} \left| \int_{\mathbb{R}} \langle \mu_t, \varphi_k(t, \cdot) \rangle dt \right|$ .

**Теорема 3.** Пусть  $(\mathfrak{X}, \rho)$  — компактное метрическое пространство. Тогда для каждой равномерной относительно  $x \in \mathfrak{X}$  п. п. по Степанову функции  $t \rightarrow \mu_{t,x}$  существует такая последовательность равномерных относительно  $x$  п. п. по Степанову функций  $t \rightarrow u_k(t, x) \in U$ , что  $\text{Mod}(u_k) \subset \text{Mod}(\mu)$  и  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mu(\cdot, x) - \delta_{u_k(\cdot, x)}\|_w = 0$  равномерно относительно  $x \in \mathfrak{X}$ . Далее, для всякой равномерной относительно  $u \in U$  п. п. по Степанову функции  $g(t, u)$   $\int_t^{t+1} \langle \delta_{u_k(s, x)}, g(s, \cdot) \rangle ds \rightarrow \int_t^{t+1} \langle \mu_{s, x}, g(s, \cdot) \rangle ds$  при  $k \rightarrow \infty$  равномерно относительно  $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathfrak{X}$ .

**3. Теорема А. Ф. Филиппова для п. п. функций.** Пусть  $(\mathfrak{X}, \rho)$  — компактное метрическое пространство,  $\text{comp}(\mathfrak{X})$  — пространство непустых компактных подмножеств пространства  $\mathfrak{X}$  с метрикой Хаусдорфа  $\text{dist}$ . Пусть далее,  $S(\mathbb{R}, \text{comp}(\mathfrak{X}))$  — пространство п. п. функций Степанова  $t \rightarrow F(t)$  со значениями в  $\text{comp}(\mathfrak{X})$  и метрикой  $d(F, G) = \sup_t \int_t^{t+1} \text{dist}(F(s), G(s)) ds$ . Далее, для заданной равномерно относительно  $x \in \mathfrak{X}$  п. п. по Степанову функции  $t \rightarrow f(t, x)$  со значениями в сепарабельном банаховом пространстве  $\mathfrak{Y}$  рассмотрим два (компактных при каждом  $t$ ) множества  $N(t) = \{x \in \mathfrak{X} : f(t, x) = 0\}$  и  $M(t, \alpha) = \{x \in \mathfrak{X} : \|f(t, x)\| \leq \alpha\}$ .

Формулируемая ниже теорема является аналогом знаменитой теоремы Филиппова.

**Теорема 4.** Если  $d(N(t), M(t, \alpha)) \rightarrow 0$  при  $\alpha \rightarrow +0$ , то  $N(t) \in S(\mathbb{R}, \text{comp}(\mathfrak{X}))$  и  $\text{Mod}(N) \subset \text{Mod}(f)$ . Кроме того, существует такая п. п. по Степанову функция  $t \rightarrow x(t) \in N(t)$ , что  $\text{Mod}(x) \subset \text{Mod}(N)$ .

**4. Дифференциальные включения.** Рассмотрим управляемую систему

$$\dot{x} = \int_U f(t, x, u) \mu_t(du), \quad (t, x, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \quad (1)$$

с равномерно относительно  $(x, u)$  п. п. в смысле Степанова функций  $t \rightarrow f(t, x, u)$ . Для заданного компактного множества  $U \subset \mathbb{R}^m$  введем в рассмотрение множество  $\text{arm}(U)$  допустимых управлений, то есть п. п. по Степанову функций  $t \rightarrow \mu_t$  со значениями в  $\text{frm}(U)$ .

Управляемой системе (1) отвечает дифференциальное включение

$$\dot{x} \in \text{cof}(t, x, U), \quad (2)$$

которое представляет интерес в том случае, если нас интересуют в первую очередь свойства *допустимых движений*, то есть п. п. в смысле Бора решений системы (1), реализовавшихся под действием допустимых управлений и не интересуют управления, на которых реализовались эти движения.

Введем в рассмотрение множество  $\mathfrak{C} = \left\{ \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k \delta_{u_k} : u_k \in U, \lambda_k \geq 0, \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k = 1 \right\}$  и функцию  $(t, u) \rightarrow g_x(t, u) \doteq \dot{x}(t) - f(t, x(t), u)$ , где  $x(t)$  — произвольное фиксированное решение включения (2). По функции  $g_x$  и множеству  $\mathfrak{C}$  построим два множества  $\mathcal{N}_x(t) = \{\mu \in \mathfrak{C} : \langle \mu, g_x(t, \cdot) \rangle = 0\}$  и  $\mathcal{M}_x(t, \alpha) = \{\mu \in \mathfrak{C} : |\langle \mu, g_x(t, \cdot) \rangle| \leq \alpha\}$ .

**Т е о р е м а 5.** Пусть  $x(t)$  — п. п. в смысле Бора решение системы (1), отвечающее некоторому допустимому управлению. Тогда  $x(t)$  является решением включения (2). Далее, пусть  $x(t)$  — п. п. в смысле Бора решение включения (2) и производная  $\dot{x}(t)$  этого решения почти периодична по Степанову. Тогда если на решении  $x(t)$  имеет место равенство  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \text{dist}(\mathcal{M}_x(t, \alpha), \mathcal{N}_x(t)) = 0$ , то существует такое допустимое управление  $\mu_t \in \mathfrak{C}$ , что  $x(t)$  является решением системы (1) при управлении  $\mu_t$ .

**5. Игольчатые вариации допустимых управлений.** При доказательстве принципа максимума для задачи оптимального управления п. п. процессами требуется построение допустимых игольчатых вариаций оптимального п. п. управления (то есть таких вариаций, при которых проварьированное управление сохраняет почти периодичность и модуль). Кроме того, проварьированное управление должно содержать достаточное число параметров. Такая вариация основана на очень простой идее, но реализация этой идеи требует кропотливой работы, аккуратно проделанной Ивановым.

Для множества  $\Delta \subset \mathbb{R}$  обозначим  $\mathfrak{M}(\Delta) = \{\mu \in \text{apm}(U) : \text{Mod}(\mu) \subset \text{Mod}(\Delta)\}$ . Фиксируем далее такую константу  $a$ , что  $2\pi/a \in \text{Mod}(\Delta)$  и вектор  $\vec{\vartheta} = (\vartheta_1 \dots \vartheta_p)$ , где  $0 \leq \vartheta_1 < \dots < \vartheta_p < a$ . Обозначим  $\text{grp}(U)^p = \{\vec{\mu} = (\mu_1 \dots \mu_p) : \mu_k \in \text{grp}(U)\}$  и рассмотрим допустимую п. п. последовательность  $\{\vec{\mu}(m)\}_{m \in \mathbb{Z}}$ , то есть такую последовательность, что при каждом  $\varepsilon > 0$  и любом  $k = 1 \dots p$  множество всех  $r \in \mathbb{Z}$ , для которых  $\sup_{m \in \mathbb{Z}} |\mu_k(m+r) - \mu_k(m)|_w \leq \varepsilon$ , относительно плотно на  $\mathbb{R}$  и  $\text{Mod}(\{\vec{\mu}(m)\}_{m \in \mathbb{Z}}) \subset a\text{Mod}(\Delta)$ .

Каждому  $i = 1 \dots N$  поставим в соответствие целое число  $k_i$  и пару  $(\vec{\beta}_{k_i}, \{\vec{\nu}_{k_i}(m)\}_{m \in \mathbb{Z}})$ , в которой  $\vec{\beta}_{k_i} = (\beta_{i1} \dots \beta_{i,k_i})$ ,  $\beta_{ij} \geq 0$ , а  $\vec{\nu}_{k_i}(m) = (\nu_{i1}(m) \dots \nu_{i,k_i}(m))$  — допустимая п. п. последовательность из  $(\text{grp}(U))^{k_i}$ . Обозначим далее  $\mathcal{V} = \{(\vec{\beta}_{k_i}, \{\vec{\nu}_{k_i}(m)\}_{m \in \mathbb{Z}})\}_{i=1}^N$  и с каждым

набором  $\eta \in \mathcal{V}$  свяжем число  $\varepsilon(\eta) = \min_{1 \leq i \leq N} (\vartheta_{i+1} - \vartheta_i) / \beta(\eta)$ , где  $\beta(\eta) = \sum_{i=1}^N |\vec{\beta}_{k_i}|$ . Построим далее, при каждом  $\varepsilon \in (0, \varepsilon(\eta))$  дизъюнктную систему примыкающих друг к другу полуинтервалов

$$T_{m,i,j}(\varepsilon, \eta) = \begin{cases} ma + [\vartheta_i, \vartheta_i + \varepsilon \beta_{i1}), \\ ma + [\vartheta_i + \varepsilon \sum_{\ell=1}^{j-1} \beta_{i\ell}, \vartheta_i + \varepsilon \sum_{\ell=1}^j \beta_{i\ell}), \quad 2 \leq j \leq k_i \end{cases}$$

и игольчатую вариацию управления  $\hat{\mu}_t$ :

$$\mu_t(\varepsilon, \eta) = \begin{cases} \hat{\mu}_t, & t \in \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} ([ma, (m+1)a] \setminus \bigcup_{i=1}^N \bigcup_{j=1}^{k_i} T_{m,i,j}(\varepsilon, \eta)) \\ \nu_{i,j}(m), & t \in T_{m,i,j}(\varepsilon, \eta), \quad m \in \mathbb{Z}, \quad 1 \leq i \leq N, \quad 1 \leq j \leq k_i. \end{cases} \quad (3)$$

Оказывается, что вариация, построенная согласно (3), является допустимой вариацией в следующем смысле: *функция  $t \rightarrow \mu_t(\varepsilon, \eta)$  почти периодична по Стапанову и при каждом допустимых  $(\varepsilon, \eta)$  её модуль содержится в  $a\text{Mod}(\hat{\mu})$ .*

Аналогичным образом строится игольчатая вариация, когда условие  $\vartheta_1 < \dots < \vartheta_p$  ослаблено до условия  $0 \leq \vartheta_1 \leq \dots \leq \vartheta_p \leq a$ , но конструкция при этом усложняется.

#### Основные работы А. Г. Иванова по теме диссертации.

1. *Иванов А.Г.* Об управляемости нелинейной системы в классе обобщенных управлений // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 5. С. 745–753.
2. *Иванов А.Г.* О почти периодической ляпуновской задаче // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 5. С. 718–724.
3. *Иванов А.Г.* Об оптимальном управлении почти периодическими движениями // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 5. С. 745–753.
4. *Иванов А.Г.* О непрерывной зависимости почти периодического решения от мерозначного управления // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28, № 11. С. 1907–1915.
5. *Иванов А.Г.* Оптимальное управление почти периодическими движениями при наличии ограничений на среднее // Доклады РАН. 1995. Т. 343, № 6. С. 51–53.
6. *Иванов А.Г.* Об оптимальном управлении почти периодическими движениями при наличии ограничений на средние типа равенств и неравенств. I // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33, № 2. С. 167–176.
7. *Иванов А.Г.* Об оптимальном управлении почти периодическими движениями при наличии ограничений на средние типа равенств и неравенств. II // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33, № 3. С. 316–323.
8. *Иванов А.Г.* Об оптимальном управлении почти периодическими движениями при наличии ограничений на средние типа равенств и неравенств. III // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33, № 4. С. 478–485.
9. *Иванов А.Г.* Об эквивалентности дифференциальных включений и управляемых почти периодических систем // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 3, № 7. С. 876–884.
10. *Иванов А.Г.* О непрерывной дифференцируемости по параметру почти периодического решения // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37, № 5. С. 601–608.
11. *Иванов А.Г.* Об одном свойстве почти периодического интеграла, зависящего от параметра // Изв. вузов. Математика. 2001. № 6(487). С. 34–43.
12. *Иванов А.Г.* Элементы математического аппарата задач почти периодической оптимизации. I // Изв. Ин-та матем. и информ. УдГУ. Ижевск, 2002. Вып. 1(24). С. 3–100.
13. *Иванов А.Г.* Элементы математического аппарата задач почти периодической оптимизации. II // Изв. Ин-та матем. и информ. УдГУ. Ижевск, 2003. Вып. 1(27). С. 3–96.
14. *Иванов А.Г.* К вопросу о непрерывной зависимости почти периодического решения нелинейной системы управления от параметра // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39, № 2. С. 186–197.
15. *Иванов А.Г.* К вопросу об оптимальном управлении почти периодическими движениями // Изв. вузов. Математика. 2003. № 4(510). С. 40–56.
16. *Иванов А.Г.* Об одном свойстве решения задачи почти периодической оптимизации // Изв. вузов. Математика. 2005. № 2(531). С. 13–29.
17. *Иванов А.Г.* Об оптимальном управлении почти периодическими движениями при наличии ограничений. I // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41, № 3. С. 312–324.
18. *Иванов А.Г.* Об оптимальном управлении почти периодическими движениями при наличии ограничений. II // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41, № 4. С. 441–455.
19. *Иванов А.Г.* О корректности расширения задачи управления почти периодическими движениями // Изв. вузов. Математика. 2005. № 6(534). С. 14–25.
20. *Иванов А.Г.* Динамическая система сдвигов и существование решения задачи почти периодической оптимизации // Изв. вузов. Математика. 2005. № 10(538). С. 29–46.

Тонков Евгений Леонидович  
Удмуртский государственный ун-т,  
Россия, Ижевск  
e-mail: eltonkov@udm.ru

Поступила в редакцию 10 мая 2007 г.